Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

12. 5. 2000 SS 2000

1. Nablakalkül

(a) Formen Sie folgende Ausdrücke um: $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})$, $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$, $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

(b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $\vec{\nabla} r$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{e}_r$, $\vec{\nabla}\times\vec{r}$.

(c) $\vec{E} = Q_0\vec{e}_r\frac{1}{r^2}\,\theta(r-R)$ ist das elektrische Feld einer Metallkugel. $\partial_x\vec{E}_1 = ? \Rightarrow$ div $\vec{E} = ?$.

2. Gradient für Parallelogrammkoordinaten

Zwei Koordinatensysteme in der Ebene seien durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

miteinander verknüpft.

(a) Zeichnen Sie die Koordinatenlinien in ein Diagramm ein

(b) Für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ gilt

$$d\phi = \vec{\nabla}\cdot d\vec{r} \doteq (\underline{\nabla}\phi)^T d\underline{r} = (\underline{\nabla}'\phi)^T d\underline{r}', \tag{1}$$

wobei $(\underline{\nabla}\phi)^T = (\partial_x\phi, \partial_y\phi)$ und $d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ sowie entsprechend für das andere Koordinatensystem. Drücken Sie $d\underline{r}'$ durch $d\underline{r}$ aus und finden Sie aus Gleichung (1) den Zusammenhang zwischen $\underline{\nabla}\phi$ und $\underline{\nabla}'\phi$, auch in Komponenten.

(c) Verifizieren Sie das Resultat aus (b), indem Sie die in der Vorlesung angegebene allgemeine Formel $\vec{\nabla}\phi = (\partial_{x'}\phi, \partial_{y'}\phi)g^{-1}\begin{pmatrix} \partial_{x'}\vec{r} \\ \partial_{y'}\vec{r} \end{pmatrix}$ explizit berechnen. Zur Erinnerung: Die Metrik ist gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} \partial_{x'}\vec{r}\cdot\partial_{x'}\vec{r} & \partial_{x'}\vec{r}\cdot\partial_{y'}\vec{r} \\ \partial_{y'}\vec{r}\cdot\partial_{x'}\vec{r} & \partial_{y'}\vec{r}\cdot\partial_{y'}\vec{r} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Inverse der 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.